

1. 2次の項の係数が1でない場合

公式1～4はみな1番目の項の係数が1なのです。

公式1  $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

公式2  $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

公式3  $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

公式4  $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

では1番目の項の係数が1でないときにはどうするのかということを考えます。

つまり、式の形としては、

$\bigcirc x^2 + \square x + \triangle$

という形になっているときの考え方です。

(1) 共通因数を取り出すことを考える。

考え方 とにかくその多項式に共通因数があるかどうかを調べることが先です。

そして、その共通因数を取り出し、かっこでくくりま

す。そのあとで、( )の中にくった式が公式1～4にあてはまるのなら、公式1～4にあてはめて因数分解します。

公式にあてはまらないのならそれでオシマイ。

例1  $2x^2 + 12x + 16$

この問題は係数がみんな偶数です。つまり2でくくれます。

解  $2x^2 + 12x + 16$

例2  $-x^2 + 2x + 8$

この問題でも、 $x$ の係数は1ではありません。係数は-1ですね。

ですからこのままで、かけて8たして2を考えてもダメです。

まず-1でくくらないとダメだということです。

解  $-x^2 + 2x + 8$

このような方法で、共通因数でくくって因数分解ができる(公式にあてはめられる)というのは、 $x^2$ の係数が1になるときです。

たとえば、

例3  $9x^2 + 24x + 15$

も係数が3の倍数です。だから3でくくれます。

$9x^2 + 24x + 15 = 3(3x^2 + 8x + 5)$

しかし、これではかっこの中が因数分解できる形ではありません。これは別の工夫が必要です。これについては次の項でお勉強します。

問題Ⅰ. 次の式を因数分解しなさい。

①  $2a^2 + 14a + 24$

②  $5x^2 + 10x + 5$

③  $-2x^2 - 4x + 16$

④  $-y^2 + 6y - 9$

⑤  $4x^2 + 8x + 4$

⑥  $-3y^2 + 18y - 27$

⑦  $-x^2 - 5x + 36$

⑧  $8x^2 - 18$

(2) 2次の項が $(px)^2$ とならないか調べる。

考え方 これもかんづめ方式(びんづめ方式)の1種だと思えばよいのだが、1番目の項のある式「 $px$ 」の平方の形「 $(px)^2$ 」にもっていくのがミソです。

例4  $4x^2 + 16x + 15$

=

こうやってから、かけて15たして8を考える。

=

これは $2x = X$ という置き換え(かんづめ)をしていると思ってもいい。つまり

$4x^2 + 16x + 15$

=

例3はこの考えでできます。つまり、2次の項の係数が平方数(4, 9, 16, 25 ……)のときにはこの方法でできる可能性があります。

例3をやってみましょう。

問題Ⅱ. 次の式を因数分解しなさい。

①  $4x^2 + 10x + 6$

②  $9x^2 + 24x + 16$

③  $9a^2 + 30a + 25$

④  $4x^2 + 12x + 9$

## 2. 登場する文字が2種類ある場合

考え方 一方の文字を中心に考えます。

そうして公式1に当てはめて、かけて××、たして△△というように考えてやる必要があります。

例5(これは1種類するとき)

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + 8 \\ & = (x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

ここではかけて8、たして6を考えましたね。

例6(2種類にしたら……)

$$\begin{aligned} & x^2 + 6xy + 8y^2 \\ & \text{ここでは一方の文字, } x \text{ を中心に考えて,} \\ & x^2 + 6y \times x + 8y^2 \\ & \text{つまり, かけて } 8y^2, \text{ たして } 6y \text{ を考えます。} \\ & \text{そうすると, そのような式は } 2y \text{ と } 4y \text{ です。} \\ & \quad (2y \times 4y = 8y^2) \\ & \quad (2y + 4y = 6y) \end{aligned}$$

そこで,

$$\begin{aligned} & x^2 + 6xy + 8y^2 \\ & = \end{aligned}$$

例7(これは1種類するとき)

$$\begin{aligned} & x^2 + 10x + 25 \\ & = (x + 5)(x + 5) \\ & = (x + 5)^2 \end{aligned}$$

例8(2種類にしたら……)

$$\begin{aligned} & x^2 + 10xy + 25y^2 \\ & = \end{aligned}$$

これにさらに輪をかけてややこしくなるのが、 $x^2$ の係数が1でないとき(前のところで取り上げた場合)

例9  $4x^2 + 20xy + 25y^2$   
=

問題Ⅲ. 次の式を因数分解しなさい。

- ①  $x^2 - 20xy + 100y^2$
- ②  $a^2 + 4ab + 4b^2$
- ③  $a^2 - 8ab + 16b^2$
- ④  $4x^2 + 12xy + 9y^2$
- ⑤  $25y^2 - 10xy + x^2$
- ⑥  $-12a^2 + 27b^2$

## 3. 複雑な式の場合

(1) 見るからにかんづめができそうな式

これはもう見るからに置き換えをすれば(かんづめを作れば)公式にあてはまるといったものがあります。つまり、同じ式がかっこでくくられているものやよく似ていて、工夫をすればかんづめにできるものです。

考え方 かんづめ方式で因数分解!

例10  $(x + y)^2 + 5(x + y) + 6$

これなんかもう( )の中を  $X$  とすればいいのだということを問題に示してあるようなものです。やってみると……  
解

慣れればびんづめ方式でやってもいいです。頭の中でひとかたまりと考えてね。

(2) 難しいかんづめの作り方

①  $x + y$  と  $-x - y$  との関係

これはみるからに關係ありそう(でもないか)  
 $x + y = A$  とおけば  
 $-x - y = -(x + y) = -A$

②  $x - y$  と  $-x + y$  との関係

$x - y = B$  とおけば  
 $-x + y = -(x - y) = -B$

例11 (成城学園高)

$$\begin{aligned} & x(a - b) - a + b \\ & = \end{aligned}$$

←この変形がミソ!

③  $x - y$  と  $y - x$  との関係

關係なさそうで実はある。なさそでウツフン、ありそでウツフン黄色いサクランボである(おじさんしか知らない! 中学生には意味不明!)。  
項の順を  $x$  の項,  $y$  の項の順に並べるとわかります。  
 $x - y = C$  とおけば  
 $y - x = -x + y = -(x - y) = -C$   
つまりは②と同じなのです。

例12(兵庫93)

$$\begin{aligned} & x(x - 2) - (2 - x) \\ & x - 2 = X \text{ とおく} \\ & 2 - x = -x + 2 = -(x - 2) = -X \\ & \text{したがって} \\ & x(x - 2) - (2 - x) \\ & = \end{aligned}$$

問題IV. 次の式を因数分解しなさい。

- ①  $(a + b)^2 - 3(a + b) - 4$
- ②  $(x + y)^2 - 10(x + y) + 16$
- ③  $(a + b)x + (a + b)(y + z)$
- ④  $a(x - y) + bx - by$
- ⑤  $(x + y)^2 + 3(x + y) + 2$
- ⑥  $(a + b)^2 - 2(a + b) + 1$
- ⑦  $m(x - 2y) + n(2y - x)$
- ⑧  $(x - 3)^2 - 16$
- ⑨  $a(x - y) - bx + by$
- ⑩  $ax - 3a - x + 3$

4. 1文字で手がかりのない場合

考え方 一度、展開をして式を整理せよ。

置き換えができないような場合でも文字が1種類しかないときには、一回展開して、式を整理することができる場合があります。

例12をこの方法でやってみると

5. 4項式の因数分解の場合

(1) 文字が並列的に並んでいるとき

考え方 お友達を2人ずつつくる

「1-3, 2-4」または「1-2, 3-4」というように「2項2項方式」でくくるとうまくいく。これを「ニコニコ方式」といいます(とまあ勝手に名付けてるだけだけど……)。

例13  $ax - ay - x + y$

こういうのを文字が規則的に並んでいるというのです。どこが規則的かって？

例えば、 $a$ についてみると、  
 $a$ あり、 $a$ あり、 $a$ なし、 $a$ なし  
 ということで、2つずつ $a$ の有無で分類できる。

例えば、 $x$ についてみると、  
 $x$ あり、 $x$ なし、 $x$ あり、 $x$ なし  
 ということで、2つずつ $x$ の有無で分類できる。

例えば、 $y$ についてみると、  
 $y$ なし、 $y$ あり、 $y$ なし、 $y$ あり  
 ということで、2つずつ $y$ の有無で分類できる。

例えば、符号についてみると、  
 +, -, -, +  
 ということで、2つずつ+か-かで分類できる。  
 わかったかな？

式をこういう風にみることができるとことが大切なのだよ。

では解(1-2, 3-4とみると)

$$\text{例13 } \underline{ax - ay - x + y} = \underline{a(x - y) - (x - y)}$$

続いて別解(1-3, 2-4とみると)

$$\text{例13 } \underline{ax - ay - x + y} = \underline{ax - x - ay + y}$$

$$= x(a - 1) - y(a - 1)$$

問題V 次の式を因数分解しなさい。

- ①  $x^3 + x^2 + x + 1$
- ②  $x^3 + x^2 - x - 1$
- ③  $x^2 + xy + 4x + 4y$
- ④  $x^2 - y^2 + 2x - 2y$
- ⑤  $x^2 - 3xy + 3x - 9y$
- ⑥  $a^2 - ab - bc + ac$
- ⑦  $x^4 - x^2 + x - 1$

(2) 一方の文字に偏りがあるとき

考え方 偏りをそのまま利用する

「1項3項方式」でやるとうまくいく。つまり、偏りをそのまま使うのである。

偏りがあるとは、どれが一つの文字についてみれば、「ニコニコ」の時のような規則性がないということなのだ。

とにかく例題をやってみよう。

この例題だと、4つの項のうち $x$ のあるのは1つだけ、 $y$ のあるのは2つだけ、符号の+は1つで、-が3つ、などと式の項に偏りがある。

$$\text{例14 } x^2 - y^2 - 8y - 16$$

$$= x^2 - (y^2 + 8y + 16)$$

問題VI 次の式を因数分解しなさい。

- ①  $x^2 - y^2 - 6y - 9$
- ②  $x^2 - y^2 + 6y - 9$

はい、以上です。

因数分解って難しいね。それは式をどう見るかっていう訓練でもあるし、式をどう見るかっていう数学的な感覚でもあります。

公立高校や石川県内の私立高校の入試には通常そんな高いレベルの因数分解は出題されません。なので、教科書レベルが解けるようにがんばろう。